



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni

topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

# Application of cell method in multiphysics analysis

## Introduction and Formulation

M. Repetto

Dipartimento Energia  
Politecnico di Torino



**POLITECNICO  
DI TORINO**

Dipartimento  
Energia

December 2015

Where it all began...



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio



*Formulazione Finita dell'elettromagnetismo*

*Enzo TONTI*

*Udine 15 - 17 Giugno 2000*



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche  
Variabili globali  
Equazioni  
topologiche  
Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

Journal of Computational Physics 257 (2014) 1260–1290

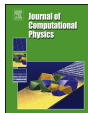


ELSEVIER

Contents lists available at [ScienceDirect](#)

Journal of Computational Physics

[www.elsevier.com/locate/jcp](http://www.elsevier.com/locate/jcp)



## Why starting from differential equations for computational physics?

Enzo Tonti

University of Trieste, Italy



**Your article *Why start from differential equations for computational physics?***

Dear Prof. Tonti,

We are pleased to present to you the last overview of the performance of your article in *Journal of Computational Physics*.

You have received quarterly Article Usage Alerts in the first year after publication of your article, and this is the last alert you will receive. We hope that the Article Usage Alerts have helped you to measure the impact of your article via its usage on ScienceDirect.

**Your article has been downloaded or viewed 3663 times since publication.**



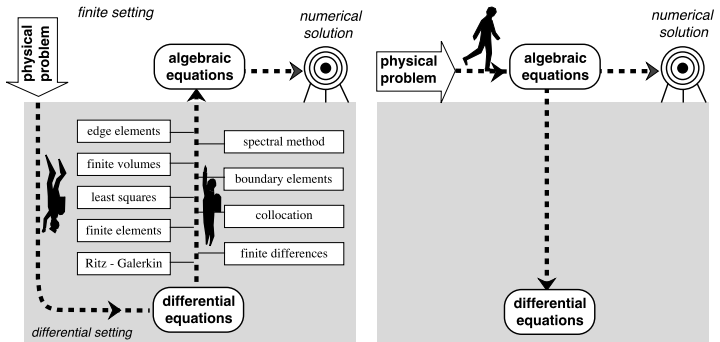


Fig. 1. (left) The tortuous path to obtain a numerical solution to a physical problem; (right) the direct procedure.



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni

topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

On account of their physical meanings, physical variables have a great information content that can and must be taken into account doing computational physics. This forbids some choices in the discretization process and, at the same time, suggests other choices. To give an example, the introduction of a pair of dual meshes into computational physics is dictated by physical reasons (with which we will deal later) and also physical reasons oblige to associate each physical variable with a well defined space element, i.e. vertex, or edge, or face or volume. Hence both choices must not be made by trials and errors simply looking for a more stable scheme or a more accurate result.

E. Tonti, ibidem



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche  
Variabili globali  
Equazioni  
topologiche  
Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

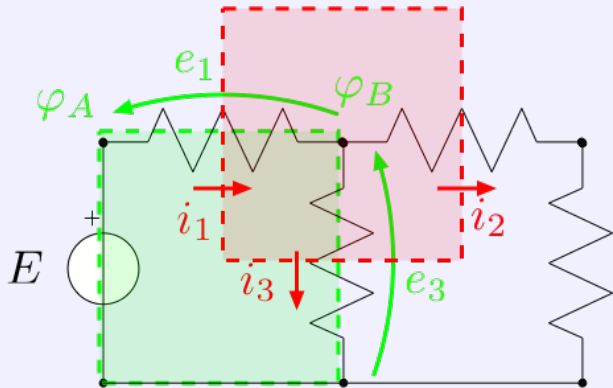
Caso studio

Complesso  
baricentrico  
interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

# a place for everything and everything in its place

currents live on edges, potentials on nodes, etc.  
Kirchhoff voltage law on meshes, Kirchhoff current law on nodes, but nodes are...?





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

- 1 the notion of global variable as opposed to that of field variable;
- 2 the distinction between source, configuration and energy variables;
- 3 the fundamental problem of a physical theory;
- 4 the notion of space element endowed with inner or outer orientation;
- 5 the association of global variables with the oriented space elements;
- 6 the need of a cell complex;
- 7 the need of the dual cell complex;
- 8 the problem formulation;



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

# why analogies ?



Richard Feynman rise the question:

*" Why are the equations from different phenomena so similar?*

*... Is it possible that ... the thing which is common to all phenomena is the **space**, the framework into which the physics is put? "*

*Feynman, Leighton, Sands, Lectures in Physics, v. II, p.12-12 Addison Wesley, 1964*





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

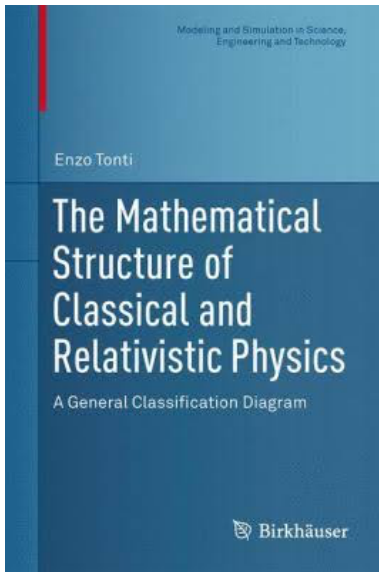
Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

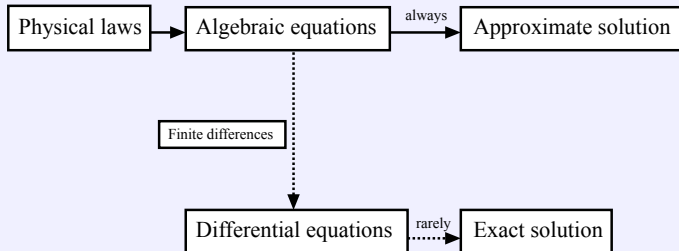
## Metodi variazionali e metodi algebrici

- La soluzione numerica di un problema alle derivate parziali può essere affrontata su base variazionale come nel caso del metodo degli elementi finiti
- un approccio alternativo risiede nella riformulazione delle equazioni del problema considerando che il dominio del problema non sia continuo ma intrinsecamente discreto
- questo approccio è legato alla fisica del problema in quanto molte grandezze sono sperimentalmente definite in maniera discreta (ad es. una tensione definita lungo una linea, un flusso attraverso una superficie, una carica contenuta in un volume etc.) e vengono poi astratte a grandezze variabili in maniera puntuale (un gradiente di potenziale, una densità di flusso, una densità volumetrica di carica etc.)



## metodi algebrici

- La discretizzazione del dominio del problema consente quindi di affrontare la soluzione numerica del problema direttamente in maniera algebrica.





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## metodi algebrici

- La discretizzazione del dominio deve essere effettuata in maniera opportuna in modo da tradurre in maniera efficiente le leggi della fisica in equazioni algebriche
- un approccio che si e' diffuso in maniera *spontanea* nell'ambito delle soluzioni numeriche di diversi problemi fisici riguarda la discretizzazione del dominio in due diversi sistemi di elementi spaziali strettamente interconnessi
- la teoria che sta alla base di questa discretizzazione e' stata sviluppata principalmente dal Prof. Enzo Tonti dell'Universita' di Trieste (<http://discretephysics.dic.units.it/>) e porta all'implementazione diretta delle equazioni di campo in equazioni algebriche.



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

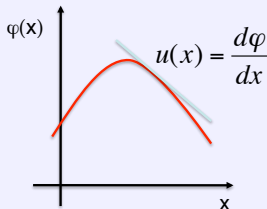
caso studio

## Operatori discreti

- Alla base della formulazione finita delle leggi della fisica c'è la scrittura degli usuali operatori differenziali in termini di grandezze vincolate a variare su di uno spazio discreto

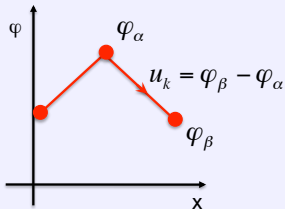
## spazio continuo

$\varphi$  e  $u$  definiti *pointwise*



## spazio discreto

$\varphi$  *pointwise*  $u$  su intervalli





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## Spazio discreto

- Lo spazio a tre dimensioni puo' essere suddiviso in elementi *connessi* di dimensione variabile da 0 a 3:

0 d

points



1 d

edges



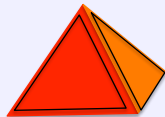
2 d

faces



3 d

volumes





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

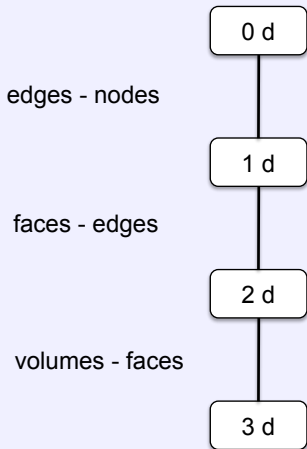
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## Relazioni topologiche

- le relazioni tra i vari elementi possono essere descritte da legami topologici:





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

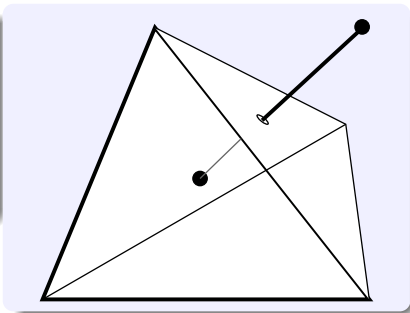
caso studio

## Complesso duale

- Se lo spazio e' stato discretizzato in elementi, e' possibile definire un complesso *duale* in modo che ad ogni elemento di dimensione  $n$  ne corrisponda uno di dimensione  $d - n$ :

## dualita'

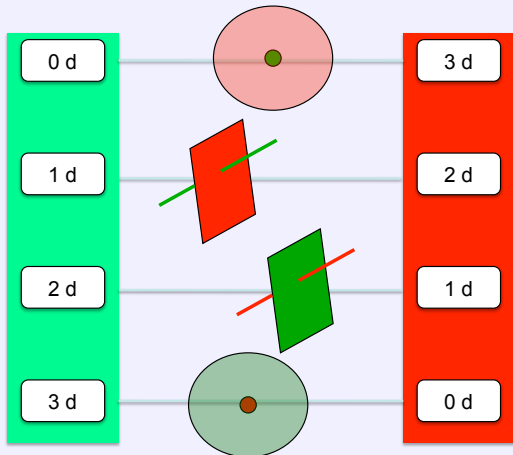
point $P$	$\Leftrightarrow$	volume $\tilde{V}$
edge $E$	$\Leftrightarrow$	face $\tilde{F}$
face $E$	$\Leftrightarrow$	edge $\tilde{E}$
volume $V$	$\Leftrightarrow$	point $\tilde{P}$





## Relazioni duali

- Le reazioni di dualita' possono essere descritte da un diagramma con due colonne: a sinistra gli **elementi primali**, a destra gli **elementi duali**

Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentricointerpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

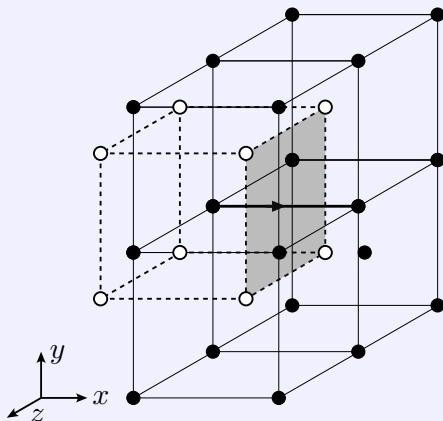
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## Discretizzazione del dominio

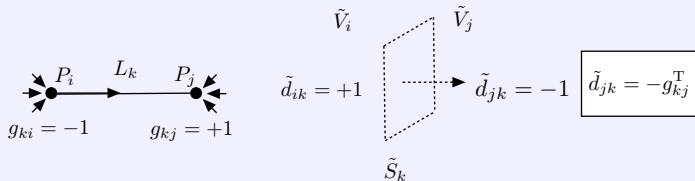
- Mediante gli elementi primali e duali e' possibile costruire una discretizzazione del dominio del problema





## Matrici topologiche

- Le reazioni tra gli elementi di un complesso sono descritte da *matrici di incidenza*.
- le matrici di incidenza legano ogni elemento di dimensione  $n$  a quelli di dimensione  $n - 1$
- grazie alla dualità esiste una relazione semplice tra le matrici del complesso primale e di quello duale





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

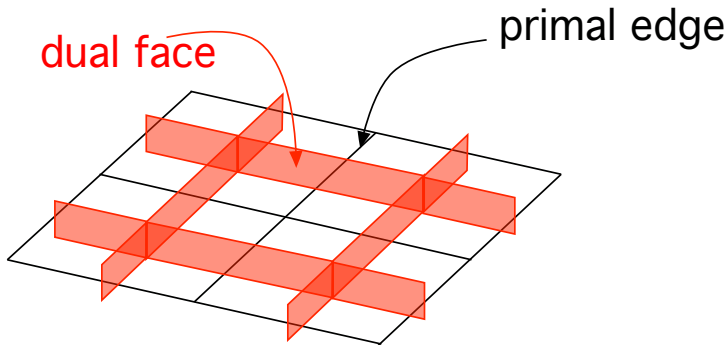
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## caso 2D

- in un caso bidimensionale la struttura duale viene considerata estesa su uno spessore fittizio.





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

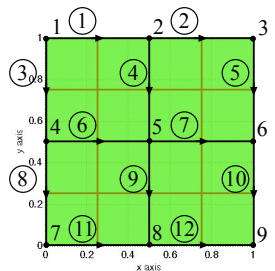
interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

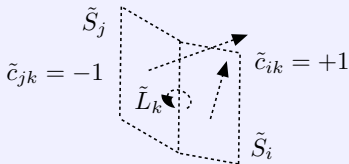
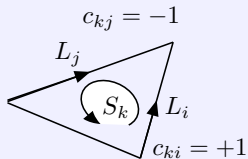
$P=9$ ,  $E=12$ , matrice  $G$  ( $12 \times 9$ )

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-1	+1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	-1	+1	0	0	0	0	0	0
3	-1	0	0	+1	0	0	0	0	0
4	0	0	-1	0	0	+1	0	0	0
5	0	0	-1	0	+1	0	0	0	0
6	0	0	0	-1	+1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	-1	+1	0	0	0
8	0	0	0	-1	0	0	+1	0	0
9	0	0	0	0	-1	0	0	+1	0
10	0	0	0	0	0	-1	0	0	+1
11	0	0	0	0	0	0	-1	+1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	-1	+1

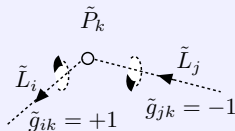
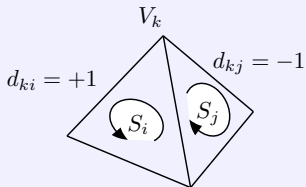




## Matrici topologiche



$$\tilde{c}_{kj} = c_{jk}^T$$

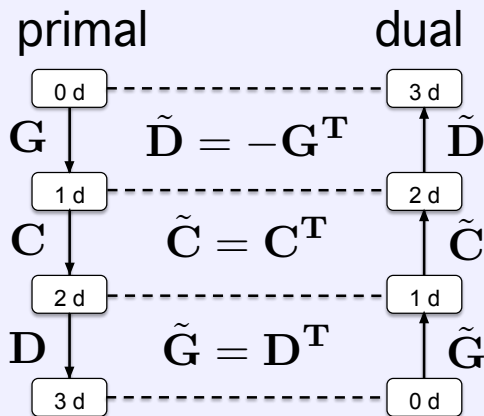


$$\tilde{g}_{jk} = d_{kj}^T$$



## Matrici topologiche

- Nel diagramma degli elementi discreti le matrici topologiche consentono di passare da una dimensione alla successiva





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## Variabili fisiche

- La discretizzazione dello spazio in elementi primali e duali diventa la naturale struttura su cui definire le variabili del problema fisico
- nella formulazione finita le grandezze fisiche non variano da punto a punto ma sono definite sugli elementi geometrici
- in questo caso si parla di *variabili globali* contrapposte alle *variabili differenziali* utilizzate nella formulazione classica



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentricointerpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## conduzione del calore in condizioni stazionarie

A differenza delle variabili differenziali funzioni del punto, le variabili globali sono definite in maniera discreta e sono associate agli elementi spaziali

Differential setting	Global setting
Temperature: $T$ (K)	Temperature: $T$ (K)
Temperature gradient: $\vec{g}$ (K/m)	Temperature difference $\gamma = \int \vec{g} \cdot d\vec{l}$ (K)
Heat current density: $\vec{q}$ (W/m <sup>2</sup> )	Heat current: $\Phi = \int \vec{q} \cdot d\vec{S}$ (W)
Heat production density rate: $\sigma$ (W/m <sup>3</sup> )	Heat production $p = \int \sigma dV$ (W)



## Variabili sorgente e variabili configurazione

- Analizzando le varie teorie fisiche si può vedere come le grandezze siano sempre suddivise in due tipi:
  - *variabili sorgente*: descrivono le cause che agiscono sul sistema
  - *variabili configurazione*: descrivono la reazione del sistema alle sorgenti
- i due tipi di variabili sono legate tra di loro da equazioni topologiche che sono *esattamente* verificate sul dominio discretizzato (equazioni di bilancio, circolazione etc.)
- le variabili sono associate agli elementi di un complesso:
  - le **variabili sorgente** sono associate al complesso duale
  - le **variabili configurazione** sono associate al complesso primale



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

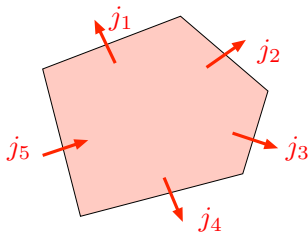
## campo di corrente statico

- **variabili sorgente**: flusso di carica attraverso una superficie  $j$
- **variabili configurazione**: potenziale sui punti  $\varphi$ , differenza di potenziale o tensione lungo un edge  $e$
- equazioni topologiche:
  - bilancio di carica elettrica
  - differenza di potenziale lungo i lati



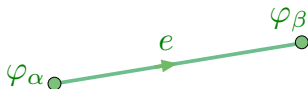
## campo di corrente statico

- bilancio di carica



$$j_1 + j_2 + j_3 + j_4 - j_5 = 0 \quad (1)$$

- differenza di potenziale



$$e = \varphi_\beta - \varphi_\alpha \quad (2)$$



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## caratteristiche dei materiali

- Le equazioni topologiche non sono da sole sufficienti a definire la soluzione del problema
- e' necessario legare tra di loro le variabili sorgente alle variabili configurazione attraverso le caratteristiche dei materiali
- le equazioni di questo tipo sono dette *equazioni costitutive*
- le caratteristiche dei materiali sono definite in termini di grandezze puntuali e quindi e' necessaria una loro elaborazione al fine di esprimerle in funzione di quelle globali



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## caratteristica corrente-tensione

- L'equazione caratteristica del flusso di corrente lega la tensione su un lato alla corrente sulla faccia duale ad esso collegata
  - *variabile sorgente*: corrente su faccia duale
  - *variabile configurazione*: tensione su lato primale

- le due entità topologiche sono legate da dualità
- l'equazione costitutiva in termini di variabili differenziali è data da:

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad (3)$$

- al fine di far comparire le variabili globali è necessario definire l'andamento dei *campi* intorno alla coppia latoprimal/faccia duale



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

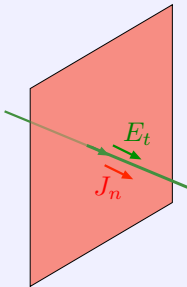
interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

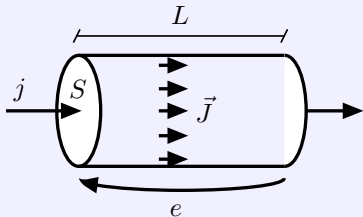
## Uniformita' locale

- Considerando che in prossimita' della coppia lato primale/faccia duale i vettori  $\vec{E}$  e  $\vec{J}$  siano uniformi e che il lato e la faccia siano ortogonali si puo' ricondurre l'equazione costitutiva al caso del resistore rettilineo

## lato-faccia



## resistore



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentricointerpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## Uniformita' local

- relazione tensione-campo elettrico

$$e = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4)$$

- relazione corrente-densita' di corrente

$$|\vec{J}| = \frac{j}{S} \quad (5)$$

- grazie all'ipotesi di uniformita' locale ed ortogonalita', gli integrali possono essere espressi come:

$$e = L|\vec{E}| = L\rho|\vec{J}| = L\rho\frac{j}{S} = \rho\frac{L}{S}j = Rj \quad (6)$$

$$j = \sigma\frac{S}{L}e = Ge \quad (7)$$





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## Equazione finale

- assemblando le equazioni topologiche e costitutive e' possibile ottenere l'equazione finale del problema

### differenziale

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (8)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (10)$$

$$-\nabla \cdot (\sigma\nabla\varphi) = 0 \quad (11)$$

### finita

$$e = -\mathbf{G}\varphi \quad (12)$$

$$j = \mathbf{M}_\sigma e \quad (13)$$

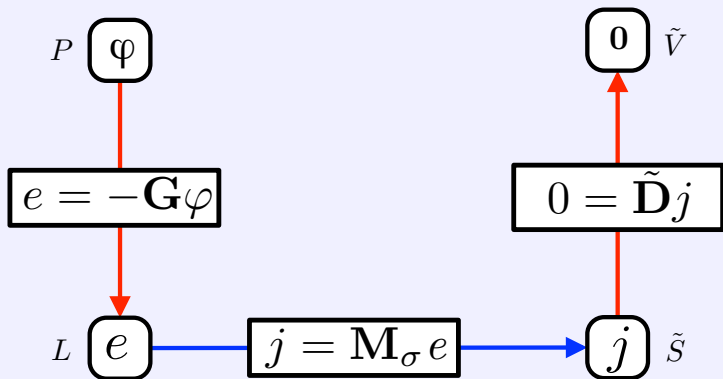
$$\tilde{\mathbf{D}}j = 0 \quad (14)$$

$$-\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{M}_\sigma\mathbf{G}\varphi) = 0 \quad (15)$$



## Struttura delle equazioni

- Le relazioni topologiche e costitutive del problema possono essere riassunte nel *diagramma di Tonti* del problema





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## Caso bidimensionale

- il dominio del problema e' costituito da un conduttore a sezione variabile alimentato attraverso un potenziale imposto in due sezioni
- la geometria e' discretizzata in volumi primali quadrangolari
- $N_N = 52$ ,  $N_E = 108$
- le condizioni al contorno sono imposte sui nodi primali

Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

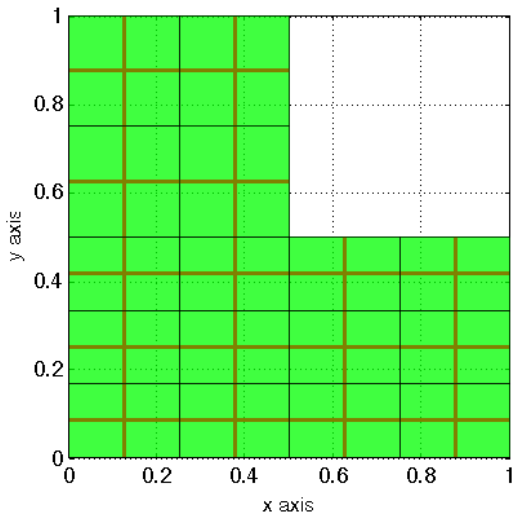
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

mesh



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

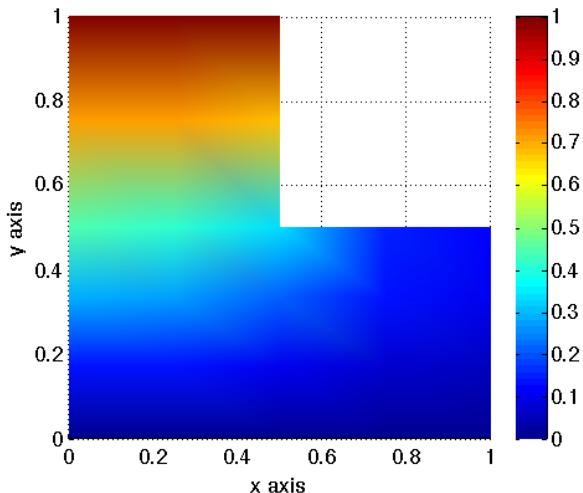
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

## potenziale elettrico





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

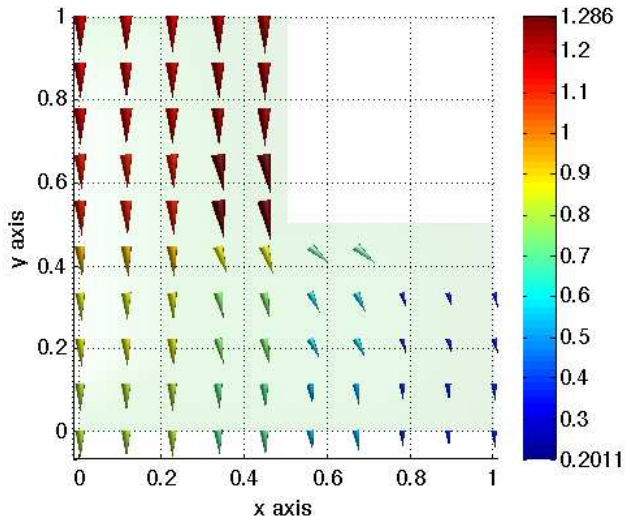
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

## campo elettrico



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

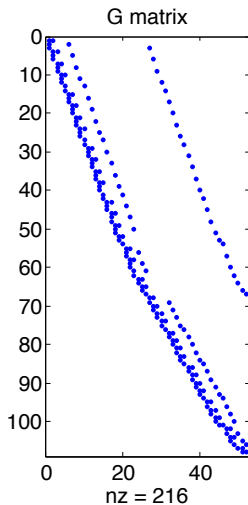
Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentricointerpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## Matrice G



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

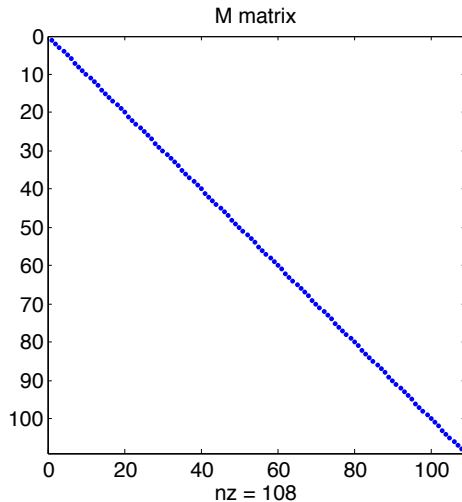
Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

Matrice  $M_\sigma$ 



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

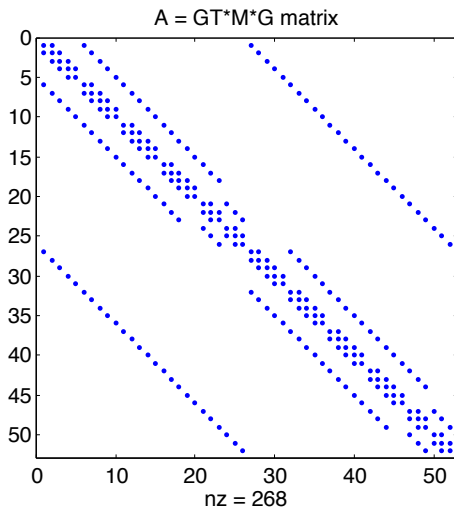
Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

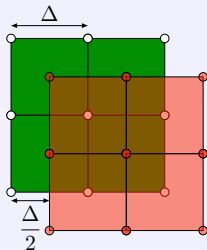
caso studio

Matrice **A**



## celle *staggered*

- La base concettuale del metodo delle celle risiede nel concetto di dualità geometrica che si accoppia in maniera efficiente alla dualità delle variabili globali
- Il concetto di dualità è spesso associato al concetto di ortogonalità ed ai complessi di celle *staggered*: complesso duale spostato di mezza cella rispetto al primale.
- L'ortogonalità è sufficiente ma non necessaria.





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

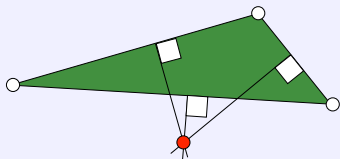
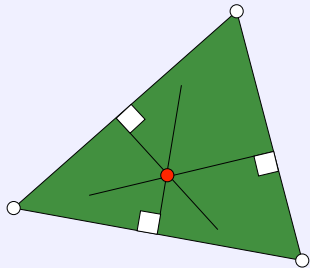
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## celle triangolari ortogonali

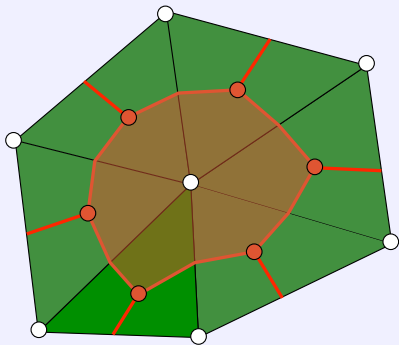
- L'estensione del concetto di *ortogonalita'* ai triangoli non e' efficiente ed e' assolutamente inapplicabile al caso tridimensionale laddove impone vincoli di regolarita' ai tetraedri che non sono realizzabili con i comuni reticolatori





## celle baricentriche

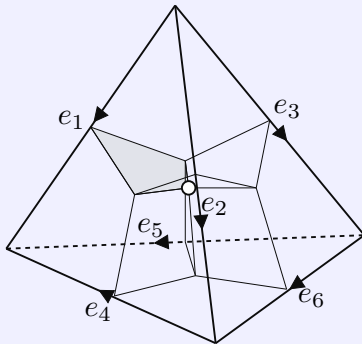
- La dualita' puo' essere imposta sul complesso baricentrico costruendo il complesso duale attraverso l'unione dei baricentri degli elementi primali





## celle baricentriche

- La generazione del complesso baricentrico puo' essere realizzata anche in tre dimensioni





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

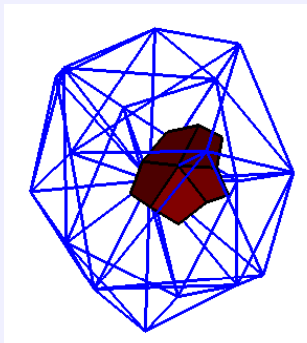
interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

## celle baricentriche

- L'unione di tutte le porzioni di facce duali appartenenti ai singoli tetraedri crea la faccia duale





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

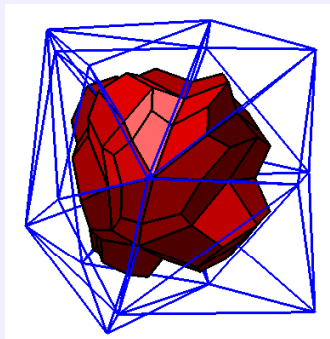
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## celle baricentriche

- L'unione di tutte le facce duali crea la superficie di confine del volume duale che circonda il nodo primale





## celle baricentriche

- Il complesso duale e' irregolare dal punto di vista geometrico ma conserva le proprieta' di dualita' con il complesso primale a tetraedri.
- In particolare:
  - un lato duale appartiene all'unione di due tetraedri separati dalla faccia primale ed e' realizzato mediante due segmenti rettilinei che collegano il baricentro di un tetraedro al baricentro della faccia e quindi al baricentro del tetraedro adiacente;
  - una faccia duale appartiene all'unione di tutti i tetraedri incernierati sul lato primale ed e' realizzato mediante l'unione di tutte le porzioni quadrilatero di piano (baricentro del tetraedro, baricentri delle facce che hanno in comune il lato e punto medio del lato)





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni

topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

## scomposizione contributi

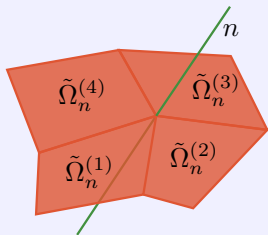
- La proprietà di ortogonalità era stata utilizzata per calcolare l'equazione costitutiva nel caso della coppia lato primale/faccia duale
- Nel caso di complesso duale baricentrico gli elementi duali non sono ortogonali e quindi va modificato il metodo di calcolo della relazione costitutiva che lega le variabili globali.
- Sebbene le entità duali siano geometricamente irregolari, esse sono realizzate mediante l'unione di parti regolari, ad esempio una faccia duale è realizzata mediante l'unione di porzioni quadrangolari di piano
- Dato che l'operazione che lega le variabili differenziali a quelle globali passa attraverso un'operazione di integrazione si può sfruttare l'additività del dominio di integrazione

## scomposizione contributi

- Nel caso di equazione costitutiva tra tensione su lato primale e corrente su faccia duale si puo' scrivere:

$$j = j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = \quad (16)$$

$$\int_{\tilde{\Omega}_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{\tilde{\Omega}_2} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{\tilde{\Omega}_3} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{\tilde{\Omega}_4} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



$$\tilde{\Omega}_n = \tilde{\Omega}_n^{(1)} \cup \tilde{\Omega}_n^{(2)} \cup \tilde{\Omega}_n^{(3)} \cup \tilde{\Omega}_n^{(4)}$$

Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni

topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

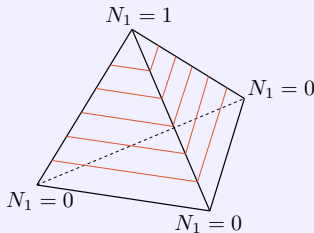
interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

## funzioni di forma nodali

- I termini che costituiscono la corrente totale appartengono ad un volume primale che puo' essere utilizzato come volume su cui definire un'interpolazione locale che lega le variabili globali a quelle locali.
- a questo scopo si possono utilizzare le funzioni di forma proprie del metodo degli elementi finiti
- le funzioni che interpolano le grandezze nodali hanno la proprieta' di valere 1 nel nodo e 0 negli altri

Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentricointerpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio



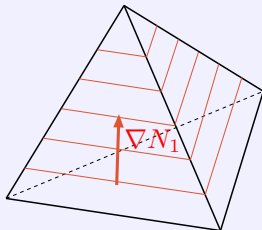
## funzioni di forma nodali

- le funzioni sono affini sull'elemento

$$N_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \quad (17)$$

- il loro gradiente e' uniforme sull'elemento

$$\nabla N_1 = (a_1, b_1, c_1) \quad (18)$$





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

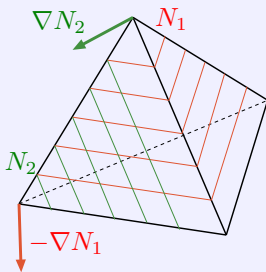
equazione costitutiva

caso studio

## funzioni di forma edge

- mediante una combinazione dei gradienti delle funzioni nodali si possono ottenere funzioni vettoriali che interpolano le grandezze vettoriali
- le funzioni dette *funzioni edge di Whitney* interpolano una grandezza definita lungo un lato tra i nodi 1 e 2 come :

$$\vec{w}_1 = N_1 \nabla N_2 - N_2 \nabla N_1 \quad (19)$$





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

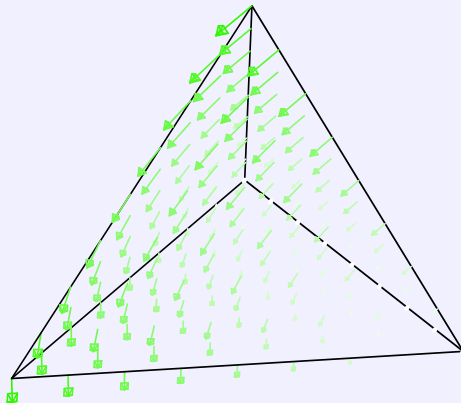
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## funzioni di forma edge

- La funzione edge associata ad un lato interpola una grandezza scalare che e' l'integrale di linea del campo vettoriale lungo il lato





## funzioni di forma edge

- definando le tensioni di lato come:

$$e_k = \int_{l_k} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (20)$$

- si puo' ottenere il campo elettrico attraverso l'interpolazione:

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_{k=1}^6 e_k \vec{w}_k(x, y, z) \quad (21)$$



## caratteristica del materiale

- L'interpolazione del campo elettrico  $\vec{E}$  consente di esprimere la densità di corrente all'interno dell'elemento come:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma \sum_{k=1}^6 e_k \vec{w}_k(x, y, z) \quad (22)$$

- il contributo alla corrente sulla porzione di faccia duale  $n$  contenuta nel tetraedro  $\alpha$  può quindi essere espressa come:

$$j_n^{(\alpha)} = \int_{\Omega_n^{(\alpha)}} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (23)$$





## caratteristica del materiale

- l'integrazione delle funzioni  $\vec{w}_k$  sulle superfici duali da luogo a coefficienti che dipendono dalla geometria:

$$j_n^{(\alpha)} = \int_{\Omega_n^{(\alpha)}} \sigma \sum_{k=1}^6 \mathbf{e}_k \vec{w}_k \cdot d\vec{S} = \sum_{k=1}^6 m_{nk}^{(\alpha)} \mathbf{e}_k \quad (24)$$

- i coefficienti  $m_{nk}^{(\alpha)}$  legano le sei tensioni sui lati del tetraedro alla corrente dell' $n$ -simo lato
- a differenza del caso ortogonale in questo caso la corrente associata al lato  $n$  non dipende quindi solo dalla tensione  $e_n$  ma da tutte le tensioni che afferiscono al tetraedro



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

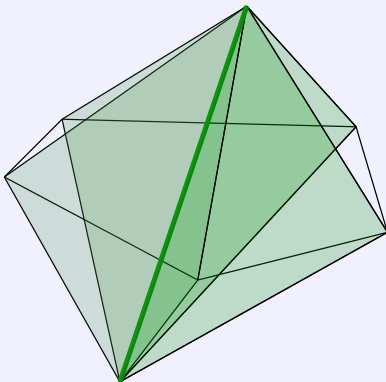
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## caratteristica del materiale

- sommando i contributi delle porzioni di faccia duale contribuiscono alla corrente tutte le tensioni dei lati appartenenti a tutti i tetraedri incernierati sul lato primale, nel caso in figura 16 lati primali





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## assemblaggio matrice costitutiva $M_\sigma$

---

### Algorithm 1 Matrix set-up algorithm

---

```

1: procedure ASSEMBLEMATRIX(geometry,material properties)
2:   for all primal volumes do
3:     build local interpolation                                ▷ local orientation
4:     build local matrix
5:     for all geometric entities do                        ▷ edges/faces
6:       store local matrix in global matrix                ▷ global orientation
7:     end for
8:   end for
9: end procedure

```

---

Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentricointerpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## campo di corrente

- Si considera un caso di campo di corrente su di un dominio cubico con potenziale imposto su due facce opposte
- il dominio e' discretizzato mediante un complesso primale a tetraedri ed un complesso duale baricentrico
- l'equazione del problema e:

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{M}_\sigma \mathbf{G}\varphi) = 0 \quad (25)$$

- lo scopo dell'esempio e' di mettere in evidenza come, nonostante la mancanza di ortogonalita' tra i due complessi di celle, la soluzione rappresenti in maniera esatta un campo uniforme



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico

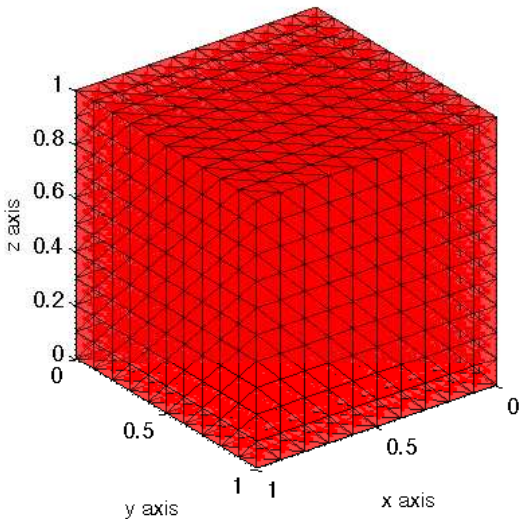
interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

caso studio

## campo di corrente



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentricointerpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## struttura dati

```
obj: [6000x1 int32]
node: [1331x3 double]
node_num: 1331
cell3d_node: [6000x4 int32]
cell3d_num: 6000
face_node: [12600x3 int32]
cell3d_face: [6000x4 int32]
face_num: 12600
edge_node: [7930x2 int32]
cell3d_edge: [6000x6 int32]
edge_num: 7930
face_edge: [12600x3 int32]
ExN: [7930x1331 double]
FxE: [12600x7930 double]
VxF: [6000x12600 double]
```



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

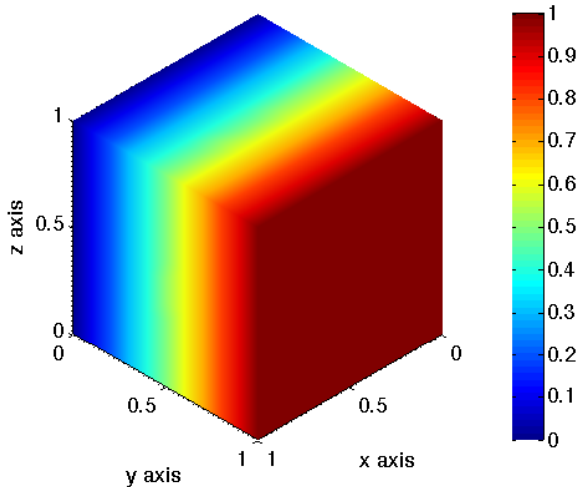
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

caso studio

## campo di corrente



Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

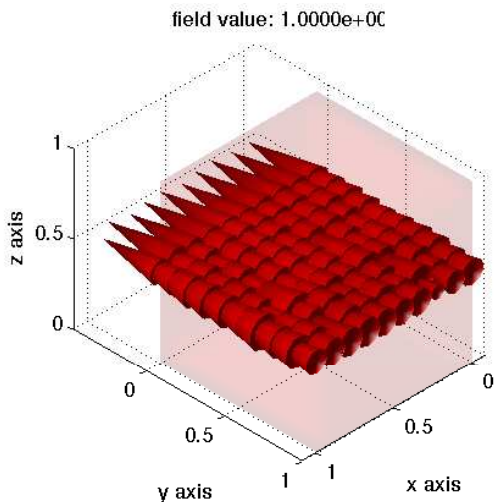
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

## campo di corrente







Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

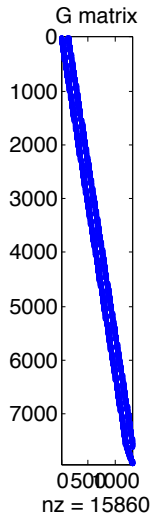
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

## Matrice gradiente $G$





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche

Variabili globali

Equazioni  
topologiche

Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

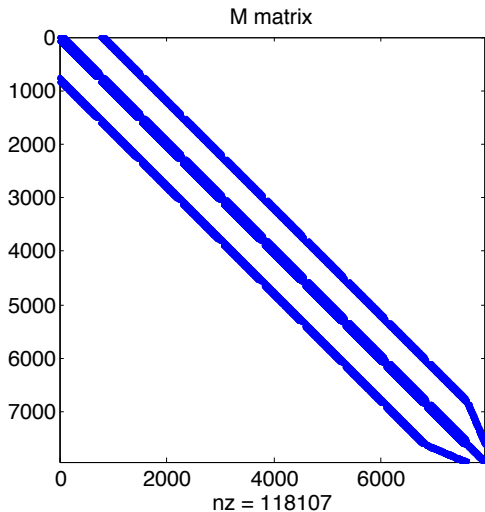
Complesso  
baricentrico

interpolazione locale

equazione costitutiva

caso studio

## Matrice costitutiva $M_\sigma$





Cell Method  
Repetto

M. Repetto

Introduzione

Formulazione  
Finita

Matrici topologiche  
Variabili globali  
Equazioni  
topologiche  
Equazioni costitutive

Diagramma di  
Tonti

Caso studio

Complesso  
baricentrico  
interpolazione locale  
equazione costitutiva

caso studio

## Matrice risolutiva $\mathbf{A} = \mathbf{G}^T \mathbf{M}_\sigma \mathbf{G}$

