



Elettrotecnica  
Cap. 1

M. Repetto,  
L. Giaccone

Parametri  
concentrati

modello  
meccanico

modello  
circuitale

grandezze di  
base

componenti

notazioni  
grafiche

Convenzioni  
di segno

leggi  
topologiche

leggi di  
Kirchhoff

LKC

LKT

# Elettrotecnica

## Capitolo 1: grandezze elettriche, componenti e leggi topologiche

M. Repetto, L. Giaccone

Dipartimento Energia  
Politecnico di Torino



**POLITECNICO  
DI TORINO**

Dipartimento  
Energia

Marzo 2013



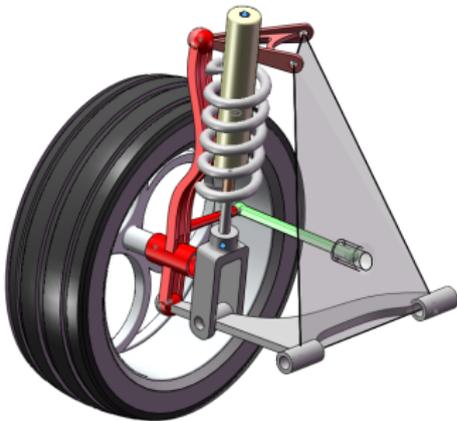
## modello matematico

- un modello matematico di un fenomeno fisico puo' avere diversi gradi di accuratezza e di complessita'
- spesso in problema ingegneristico reale le variabili fisiche sono distribuite nello spazio e nel tempo
- un modello che tenga conto di queste variazioni e' accurato ma puo' essere molto difficile da risolvere
- un modello semplificato puo' trascurare parte di queste variazioni ed essere piu' facile da gestire con un ragionevole sforzo



## sistema meccanico

modello matematico di un  
sistema meccanico  
complesso

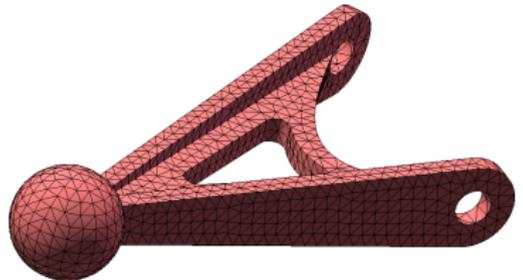


## modello rigoroso

analisi con metodi numerici  
(metodo degli Elementi Finiti)

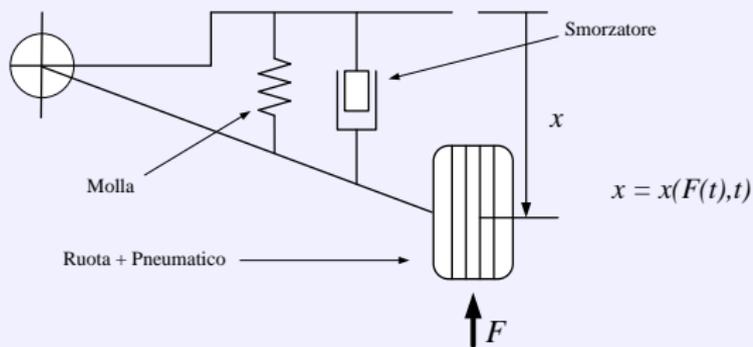
↑ soluzione molto accurata

↓ notevole onere  
computazionale





## sistema meccanico



$$x = x(F(t), t) \quad (1)$$



## sistema meccanico

- molti fenomeni fisici sono coinvolti nel sistema e dalla sua analisi si può evidenziare che i più importanti sono:
  - inerzia del sistema
  - comportamento elastico dei materiali
  - dissipazione di energia
- tutte le quantità legate a questi comportamenti sono distribuite nella struttura ed un modello accurato dovrebbe tenerne conto.
- questo richiede che tutte le proprietà dei materiali siano definite in maniera puntuale e che le loro interazioni siano definite da equazioni alle derivate parziali definite da operatori quali gradiente divergenza e rotore



## componente massa

- l'inerzia del sistema e' legata alla massa delle parti in movimento della struttura (per semplicita' (!) si trascura la rotazione)
- la massa e' distribuita su tutta la struttura con valori di densita' differenti ad esempio nel cerchione, nelle molle o nel pneumatico etc.
- da un'analisi del sistema si trova facilmente come la massa sia concentrata nella ruota (cerchio+ pneumatico)
- il modello puo' quindi essere semplificato trascurando il contributo di alcune masse di valore minore (assi, molle etc.) e **concentrando** la massa nel baricentro della ruota
- la massa della ruota a questo punto puo' essere misurata su una bilancia in laboratorio



## componente massa

- una volta che il valore della massa sia noto  $M$ , il suo comportamento puo' essere modellato dalla seconda legge della dinamica

$$F_{in} = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

- dato che la massa e' concentrata in un punto (il baricentro) l'operatore di derivata e' quello di derivata totale " $d$ " e non piu' quello di derivata parziale " $\partial$ ".
- il parametro massa  $M$  e' coinvolto anche nella definizione di energia cinetica

$$W_i = \frac{1}{2} M \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (3)$$



## componente molla

- la risposta elastica della struttura e' legata alle deformazioni reversibili di tutte le sue parti quali quali assi in acciaio, parti in gomma, molle etc.
- in maniera analoga a quanto esposto per la massa, anche per l'elasticita' il contributo principale e' dovuto alla molla che collega la ruota al telaio e che puo' essere rappresentata attraverso la legge di Hooke:

$$F_{el} = k_{el}(x - x_0) \quad (4)$$

dove  $k_{el}$  puo' essere misurata in laboratorio

- il comportamento elastico puo' immagazzinare energia elastico secondo la:

$$W_e = \frac{1}{2}k_{el}(x - x_0)^2 \quad (5)$$



## dissipazione

- ogni struttura reale e' caratterizzata da forme di dissipazione di energia
- la dissipazione puo' essere legata a diversi tipi di attrito e, ne caso in esame, il contributo maggiore deriva dall'attrito viscoso
- lo smorzatore viscoso puo' essere descritto da un'equazione nonlineare:

$$F_{fri} = k_v \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (6)$$

dove la costante  $k_v$  puo' essere misurata in laboratorio

- il componente dissipativo puo' dissipare l'energia immagazzinata o fornita al sistema dall'esterno.



## equazione complessiva

- le equazioni dei singoli componenti non sono sufficienti a definire il comportamento del sistema
- l'equazione di bilancio delle forze interne uguale alla sommatoria delle forze esterne definisce l'interazione dei contributi

$$F_{in} + F_{el} + F_{fri} = F_{ext} \quad (7)$$

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + k_{el}(x - x_0) + k_v \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = F_{ext} \quad (8)$$

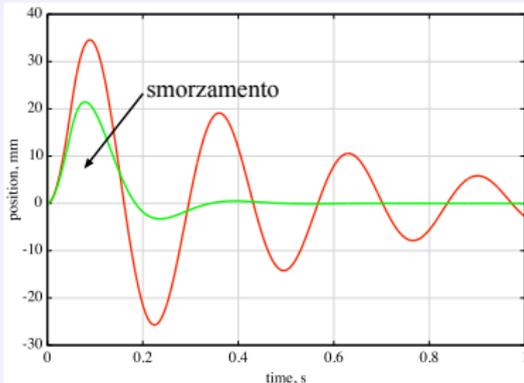


## impulso di forza

soluzione  $x = x(F(t), t)$  con  
 $F(t)$  impulso applicato in  $t = 0$

valutazione effetto dello  
smorzamento  $k_v$  sulla  
dinamica

## integrazione nel tempo





## equazione complessiva

- l'equazione finale e' un'equazione differenziale ordinaria dato che tutte le dipendenze dalle coordinate spaziali sono state rimosse e *concentrate* nei parametri  $M, k_{el}, k_v$
- la soluzione dell'equazione richiede quindi solo l'integrazione in termini della variabile tempo  $t$  (derivate totali)
- come contropartita:
  - tutte le nozioni sulle variabili interne al problema viene persa e solo  $x$  e  $F_{ext}$  sono note
  - nessuna indicazione sul rispetto di eventuali vincoli fisici e' data (ad esempio massimo stress sui componenti etc.)



## parametri concentrati

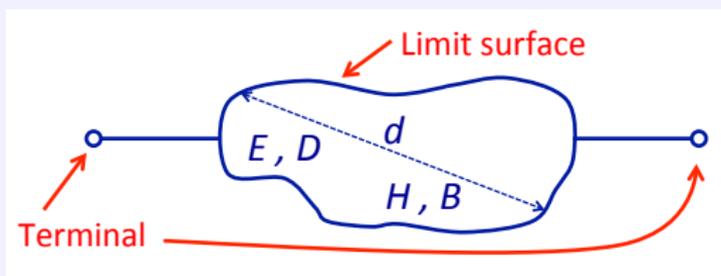
- i fenomeni dell'elettromagnetismo sono governati dalle *equazioni di Maxwell* che sono equazioni differenziali alle derivate parziali (gradiente, rotore e divergenza)
- la soluzione delle *equazioni di Maxwell* richiede quindi un'integrazione sia nello spazio che nel tempo
- esistono tecniche matematiche per la soluzione (ad es. metodo degli elementi finiti) ma queste non sono di facile utilizzo in ambiente tecnico
- l'approccio a *parametri concentrati* puo' facilitare la soluzione del problema in quanto riduce la complessita' delle variabili:

$$\delta = \delta(x, y, z, t) \rightarrow M = M(t) = \int_{vol} \delta(x, y, z, t) dx dy dz$$



## componente concentrato

- i campi elettromagnetici non sono limitati ai mezzi materiali ma si estendono nello spazio
- condizione necessaria affinché si possa definire un modello *concentrato* è che si possa limitare l'estensione spaziale del fenomeno



- i fenomeni elettromagnetici interni alla superficie devono interagire con l'esterno solo attraverso i morsetti o terminali



## ipotesi fondamentale

- esiste un'ipotesi di base per la definizione del componente circuitale: la propagazione dei segnali elettrici al suo interno deve essere istantanea
- la velocità di propagazione finita dei segnali elettrici mette un vincolo sulle dimensioni del componente.

## tempo di propagazione

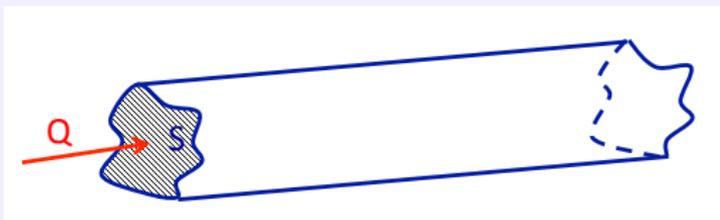
$$L = 1m, c = 3 \cdot 10^8 m/s \Rightarrow \tau = \frac{L}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^8} \simeq 3 \cdot 10^{-9} s$$

$$\text{frequenza } f = 50Hz \Rightarrow T = 1/f = 20ms \Rightarrow \tau \ll T$$

$$\text{frequenza } f = 100MHz \Rightarrow T = 1/f = 10ns \Rightarrow \tau \sim T$$



## definizione



- la definizione della corrente passa attraverso il concetto di flusso di carica  $Q$  attraverso una superficie  $S$  in un tempo  $T$ . L'unità di misura di  $Q$  è il coulomb (C)
- considerando un conduttore di sezione nota soggetto ad un flusso di carica  $Q$ , la **corrente elettrica** si definisce come:

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

- l'unità di misura nel sistema SI è l'ampere (A)

# corrente elettrica: analogia meccanica



Elettrotecnica  
Cap. 1

M. Repetto,  
L. Giaccone

Parametri  
concentrati

modello  
meccanico

modello  
circuitale

grandezze di  
base

componenti

notazioni  
grafiche

Convenzioni  
di segno

leggi  
topologiche

leggi di  
Kirchhoff

LKC

LKT

elettrico



$$i \Rightarrow \frac{\Delta \text{carica}}{\Delta \text{tempo}}, [i] = \frac{C}{s}$$

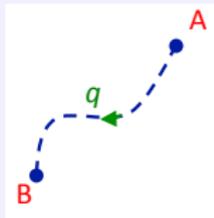
fluidico

$$q \Rightarrow \frac{\Delta \text{massa}}{\Delta \text{tempo}}, [q] = \frac{kg}{s}$$





## definizione



- spostamento della carica elettrica  $q$  dal punto A al punto B lungo in percorso arbitrario all'interno di un campo elettrico  $\vec{E}$
- la **tensione** elettrica e' definita come il lavoro necessario per effettuare tale spostamento su una carica unitaria:

$$V_{AB} = \frac{L_{AB}}{q}$$



## definizione

- in condizioni statiche il campo elettrico è conservativo, pertanto la tensione dipende solo del punto di partenza e di arrivo e non dal percorso
- si può avere una funzione denominata **potenziale elettrico**  $u$  associata ad ogni punto dello spazio
- la tensione elettrica può quindi essere definita come differenza di potenziale:

$$V_{AB} = \frac{L_{AB}}{q} = u(A) - u(B)$$

- l'unità di misura nel sistema SI è il volt (V)

# tensione elettrica: analogia meccanica



Elettrotecnica  
Cap. 1

M. Repetto,  
L. Giaccone

Parametri  
concentrati

modello  
meccanico

modello  
circuitale

grandezze di  
base

componenti

notazioni  
grafiche

Convenzioni  
di segno

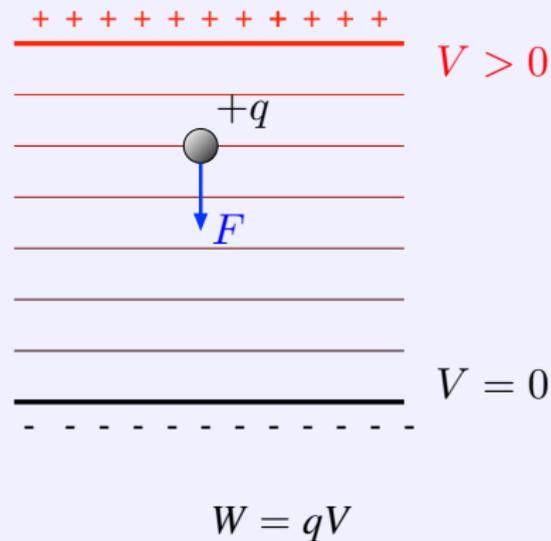
leggi  
topologiche

leggi di  
Kirchhoff

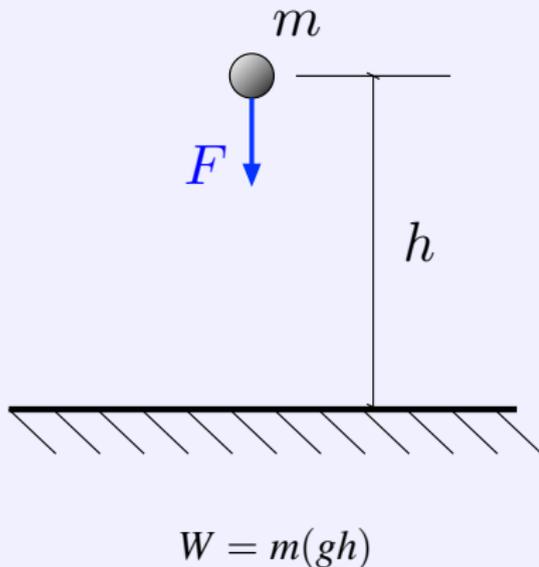
LKC

LKT

elettrico



fluido





## Potenza ed energia

Partendo dalle grandezze base corrente e tensione e' possibile definire due grandezze derivate:

- **potenza elettrica**: e' definita come il prodotto tra tensione e corrente. L'unita' di misura nel sistema SI e' il watt (W)

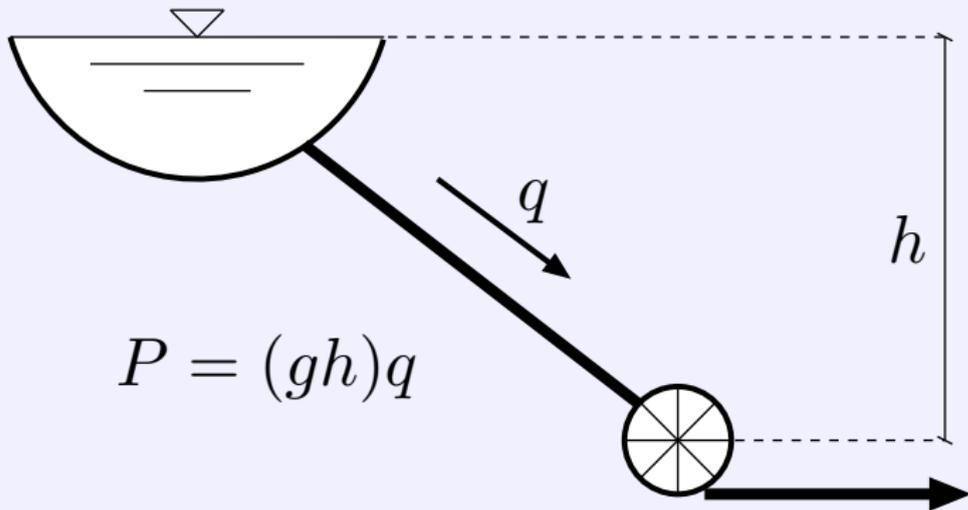
$$p(t) = v(t)i(t)$$

- **energia elettrica**: e' definita come l'integrale della potenza in un determinato lasso temporale. L'unita' di misura nel sistema SI e' il joule (J)

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt$$



## Potenza di una centrale idroelettrica





## componente a due morsetti

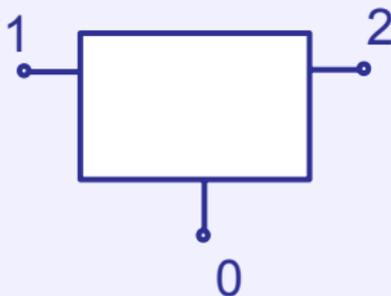
- l'interazione del componente con l'esterno deve avvenire solo attraverso:
  - la corrente elettrica che fluisce attraverso i suoi terminali o morsetti  $i$
  - la tensione elettrica che si presenta tra i suoi morsetti  $v$
- entrambe le quantità sono scalari e dipendenti dal tempo:
  - $i = i(t)$
  - $v = v(t)$
- il componente più semplice è quello con una sola coppia di morsetti detto *bipolo* o *dipolo*





## componente a $n$ morsetti

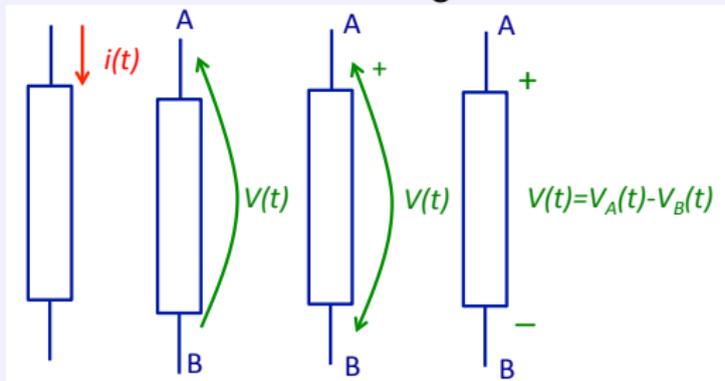
- non tutti i fenomeni elettromagnetici possono essere descritti da componenti dipolari
- in questi casi componenti piu' complessi a  $n$ -morsetti si possono definire
- in genere i morsetti sono numerati a partire dallo 0





## notazioni grafiche e segno delle grandezze

- correnti e tensioni sono quantità scalari che hanno un segno. La notazione grafica delle grandezze deve aiutare ad evidenziare il loro segno



- tutte le notazioni presentate sono equivalenti



Parametri  
concentrati

modello  
meccanico

modello  
circuitale

grandezze di  
base

componenti

notazioni  
grafiche

Convenzioni  
di segno

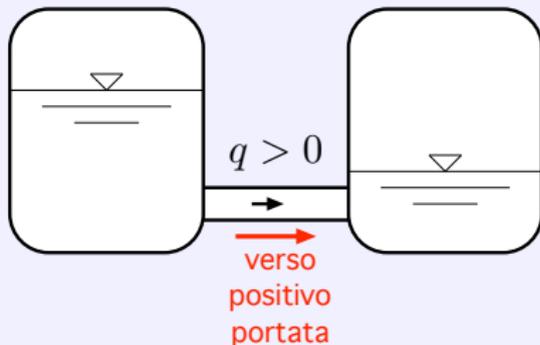
leggi  
topologiche

leggi di  
Kirchhoff

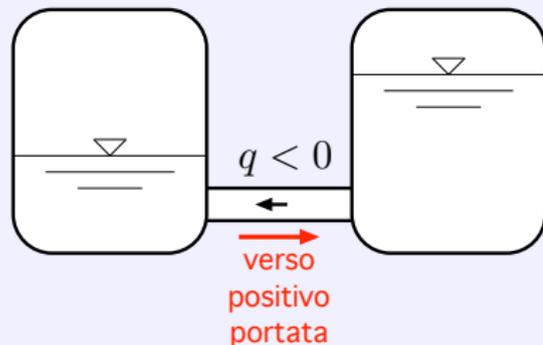
LKC

LKT

portata positiva



portata negativa

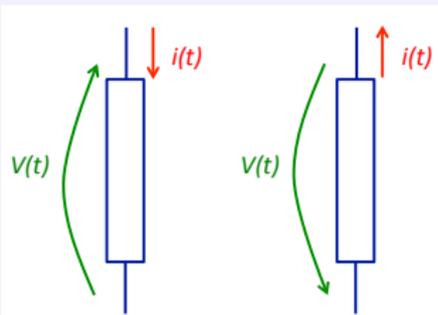




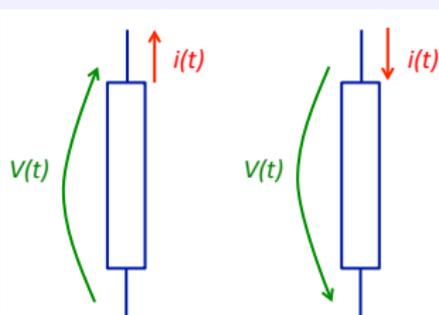
## convenzione utilizzatori/generatori

- per ogni bipolo e' possibile definire arbitrariamente la polarita' della tensione ed il verso della corrente
- ne derivano 4 possibili configurazioni che, a due a due, definiscono due importati convenzioni per lo studio degli scambi energetici:
  - convenzione degli utilizzatori
  - convenzione dei generatori

### convenzione utilizzatori



### convenzione generatori

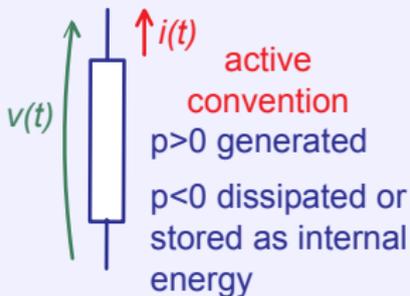




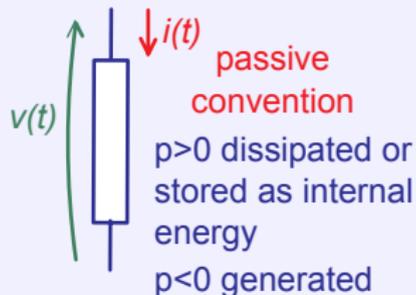
## convenzioni di segno

- dato che la potenza  $e'$  è definita come il prodotto di tensione per corrente, il suo segno dipende da quelli di  $v$  e  $i$
- la convenzione degli utilizzatori/generatori stabilisce una relazione tra il segno della potenza ed il suo significato fisico

### generatori



### utilizzatori





## convenzione utilizzatori



- fase di carica

$$v = 1.5 \text{ V}, i = 1 \text{ A}$$

$$p = vi = 1.5 * 1 = 1.5 \text{ W}$$

$p > 0 \Rightarrow$  **assorbita dall'esterno**

- fase di scarica

$$v = 1.5 \text{ V}, i = -1 \text{ A}$$

$$p = vi = 1.5 * (-1) = -1.5 \text{ W}$$

$p < 0 \Rightarrow$  **ceduta all'esterno**



## equazioni costitutive

- i componenti dipolari devono soddisfare equazioni che legano tra di loro le grandezze ai morsetti
- queste equazioni legano tra di loro le variabili ai morsetti e vengono chiamate **equazioni costitutive** o **caratteristiche tensione-corrente**

$$v = v(i, t) \quad (9)$$

$$i = i(v, t) \quad (10)$$

- alcuni fenomeni sono naturalmente descritti da equazioni che hanno come variabile indipendente la tensione o la corrente mentre per altri la notazione è indipendente



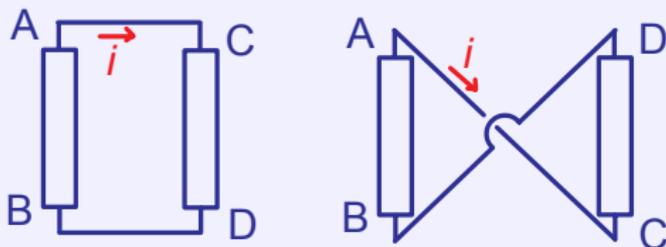
## come si puo' descrivere un circuito?

- i componenti elementari sono in grado di descrivere ogni fenomeno elettromagnetico ma le leggi costitutive non sono sufficienti per descrivere l'interazione di diversi componenti
- per descrivere le interazioni di piu' componenti e' necessario definire un nuovo insieme di leggi
- queste equazioni saranno indipendenti dai componenti ma saranno funzione solo delle connessioni
- per definire la forma delle equazioni e' necessario prima analizzare le entita' principali presenti nei collegamenti circuitali



## entità topologiche

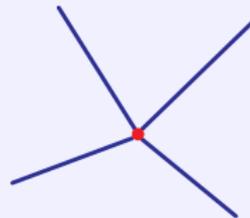
- il modo in cui i componenti sono interconnessi definisce le loro interazioni
- anche se il circuito è generalmente disegnato su di un piano, si deve ricordare come ogni variabile spaziale sia stata eliminata dal modello a parametri concentrati e quindi come non ci sia alcuna indicazione sulle *lunghezze*
- le due soluzioni indicate sono diverse come geometria ma identiche come topologia



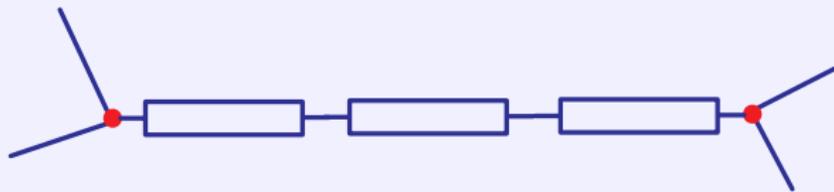


## entita' topologiche

- il circuito puo' essere descritto da poche entita'
- **nodo**: un punto di connessione tra piu' collegamenti



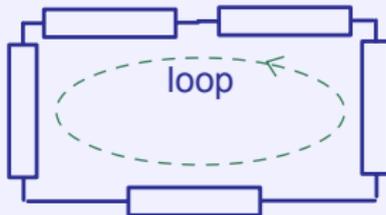
- **lato**: un insieme di componenti connessi senza alcun nodo intermedio



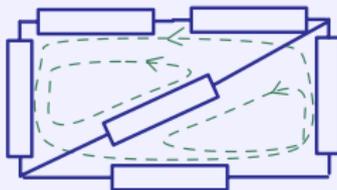


## entita' topologiche

- **maglia**: qualsiasi insieme di lati che formano un percorso chiuso



- **maglia elementare**: una maglia che non contiene altre maglie





## un nuovo insieme di equazioni

- le leggi basate sulla topologia vanno sotto il nome di **Leggi di Kirchhoff**
- le leggi di Kirchhoff sono di validità generale e si applicano ad ogni tipo di componente e di topologia
- possono essere scritte anche senza sapere nulla sulla natura dei componenti del circuito
- si possono derivare, sotto alcune ipotesi, dalle leggi dei campi elettromagnetici ma in questo caso sono presentate come un assioma
- esiste una ipotesi fondamentale per l'applicabilità delle leggi topologiche che verrà discussa in seguito



# legge di kirchhoff delle correnti (LKC)

Elettrotecnica  
Cap. 1

M. Repetto,  
L. Giaccone

Parametri  
concentrati

modello  
meccanico

modello  
circuitale

grandezze di  
base

componenti

notazioni  
grafiche

Convenzioni  
di segno

leggi  
topologiche

leggi di  
Kirchhoff

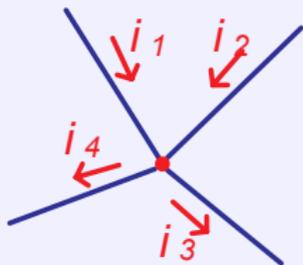
LKC

LKT

## interazione delle correnti

- le correnti interagiscono al nodo
- **legge di Kirchhoff delle correnti: ad ogni istante la somma algebrica delle correnti afferenti ad un nodo e' nulla**
- algebrico significa che segni differenti devono essere usati per le correnti entranti o uscenti dal nodo

## nodo



$$i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) - i_4(t) = 0 \quad (11)$$

$\forall t$

la LKC e' un'equazione omogenea quindi un cambio di convenzione non e' importante



# legge di kirchhoff delle tensioni (LKT)

Elettrotecnica  
Cap. 1

M. Repetto,  
L. Giaccone

Parametri  
concentrati

modello  
meccanico

modello  
circuitale

grandezze di  
base

componenti

notazioni  
grafiche

Convenzioni  
di segno

leggi  
topologiche

leggi di  
Kirchhoff

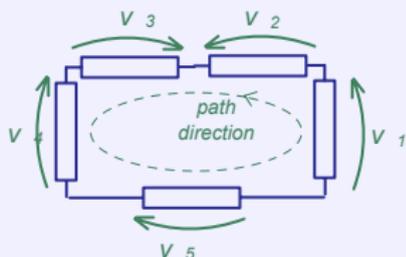
LKC

LKT

## interazione delle tensioni

- le tensioni interagiscono nella maglia
- **legge di Kirchhoff delle tensioni LKT: ad ogni istante di tempo la somma algebrica delle tensioni di maglia e' nulla**
- il segno deve essere definito in base al verso di percorrenza della maglia

## loop



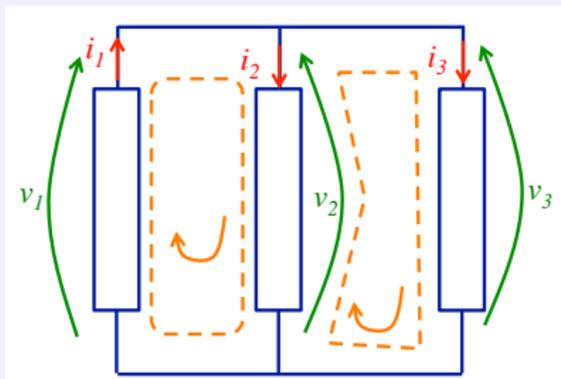
$$v_1(t) + v_2(t) - v_3(t) - v_4(t) - v_5(t) = 0 \quad (12)$$

$\forall t$ , anche la LKT e' indep. dal verso di percorrenza



## Conservazione della potenza

- Si il seguente sistema composto da 3 bipoli:



- applicazione LKC:  $i_1 = i_2 + i_3$
- applicazione LKV:  $v_1 - v_2 = 0$
- applicazione LKV:  $v_2 - v_3 = 0$
- $\Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = v$
- $\Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = v \Rightarrow vi_1 = vi_2 + vi_3$



## Conservazione della potenza

- $v_1 i = v_2 i_2 + v_3 i_3$
- $p_1 = p_2 + p_3$

La somma della potenze erogate risulta uguale alla somma delle potenze assorbite

- e' importante notare come gli unici requisiti perche' sussista tale principio di conservazione sono che:
  - le correnti di rete devono rispettare le LKC
  - le tensioni di rete devono rispettare le LKV
  - nessun vincolo viene imposto circa il legame tensioni e correnti ai capi dello stesso bipolo

**Teorema di Tellegen** (o delle potenze virtuali)

$$\sum_{\text{conv. gen.}} v_k i_k = \sum_{\text{conv. util.}} v_h i_h$$