



Elettrotecnica  
Cap. 2

M. Repetto,  
L. Giaccone

Classificazione  
componenti

resistore  
condensatore  
induttore

componenti  
attivi

generatore di  
tensione  
current source

componenti  
reali

connessioni  
tipo

connessione serie  
connessione  
parallelo  
connessioni a 3  
terminali

# Elettrotecnica

## Capitolo 2: componenti elettromagnetici, equazioni costitutive e connessioni circuitali

M. Repetto, L. Giaccone

Dipartimento Energia  
Politecnico di Torino



Settembre 2012



## quanti tipi di componenti esistono?

- i fenomeni elettromagnetici sono molto complessi e quindi, in linea di principio, ci si potrebbe aspettare di trovare un numero di componenti molto elevato
- in realta' i componenti **elementari** non sono molti
- al fine di suddividere i componenti in classi si possono utilizzare diversi criteri
- dato che i componenti sono modelli matematici, il processo di classificazione produrrà alla fine una serie di equazioni costitutive dei componenti stessi



## teoria e realta'

- i componenti definiti in maniera matematica spesso si comportano in maniera diversa da quelli reali
- **componenti ideali** sono quelli che rappresentano un singolo fenomeno elettroagnetico e ne costituiscono un modello unico
- **componenti reali** sono costruiti con materiali che seguono leggi differenti da quelle ipotizzate nel modello e quindi sono caratterizzati da **effetti parassiti**

## molla ideale e molla reale

una molla costruita con acciaio e' caratterizzata non solo da un comportamento elastico ma anche da una massa e quindi da effetti di inerzia che la **molla ideale** non ha



## che cosa alimenta i componenti?

- i **componenti passivi** necessitano di una sorgente di potenza esterna per dare luogo a qualche trasformazione energetica e sono generalmente chiamati **carichi**
- i **componenti attivi** sono in grado di trasferire potenza ai terminali dei carichi
- i componenti attivi forniscono questa potenza a spese di qualche altra forma di energia che trasformano in termini elettromagnetici

## batteria dell'auto

il motore di avviamento di un motore a combustione interna viene alimentato da un accumulatore a piombo-acido il quale, durante la marcia viene ricaricato dall'alternatore: si comporta quindi sia da componente attivo che passivo



## quanti tipi di carico esistono?

- la caratterizzazione dei carichi può essere fatta in base al loro comportamento energetico
- in base a questo criterio i componenti possono essere suddivisi in:
  - componenti in grado di **trasformare energia di tipo elettromagnetico in un'altra forma di energia**
  - componenti in grado di **immagazzinare energia nel campo elettrico**
  - componenti in grado di **immagazzinare energia nel campo magnetico**

## sistema meccanico

questa suddivisione in termini energetici può essere utilizzata anche nei sistemi meccanici: massa → energia cinetica, molla → energia elastica ed attrito → energia dissipata



## resistore

- l'effetto Joule definisce che una corrente elettrica fluente in un conduttore genera calore, quindi questo fenomeno appartiene alla prima classe di carichi
- questa classe di componenti e' descritta da una equazione costitutiva di tipo algebrico che lega tra loro tensione e corrente allo stesso istante

$$v(t) = R(i, t)i(t) \quad (1)$$

che e' chiamata **prima legge di Ohm**

Classificazione  
componenti

resistore

condensatore

induttore

componenti  
attivigeneratore di  
tensione

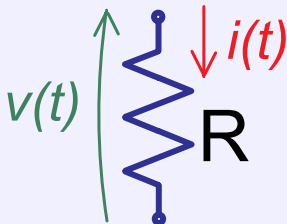
current source

componenti  
realiconnessioni  
tipo

connessione serie

connessione  
paralleloconnessioni a 3  
terminali

## simbolo grafico



## definizione

il componente si chiama  
**resistore** ed il suo parametro  
**R resistenza**

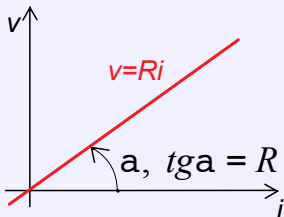
le dimensioni fisiche nel  
sistema SI sono **ohm**,  $\Omega$



## resistore Lineare Tempo-Invariante

- se il parametro  $R$  e' costante la caratteristica  $v.i$  e' lineare
- dato che in questo caso  $R$  e' indipendente dal tempo il componente e' detto **Lineare e Tempo Invariante (LTI)**

### simbolo grafico



### definizione

in questo caso  $v$  e  $i$  sono legati ad ogni istante da una relazione che puo' essere riportata in un piano con assi  $i$  e  $v$

se  $i \rightarrow x$  e  $v \rightarrow y$  la pendenza della retta e'  $R$





## conduttanza

- molto spesso e' conveniente definire il valore di **conduttanza**  $G$  di un resistore come l'inverso della sua resistenza

$$i(t) = Gv(t) \quad (2)$$

$$G = \frac{1}{R} \quad (3)$$

- le dimensioni fisiche di  $G$  sono  $\frac{1}{ohm}$  chiamato *siemens* simbolo  $S$



## potenza associata al resistore

- la potenza istantanea puo' essere calcolata dalla legge di Ohm come:

$$p(t) = v(t)i(t) = [Ri(t)] i(t) = Ri(t)^2 \quad (4)$$

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t) \left[ \frac{v(t)}{R} \right] = \frac{v(t)^2}{R} \quad (5)$$

- in entrambi i casi la potenza puo' solo essere positiva ( $R > 0$ ) e questo conferma che il resistore non e' in grado di fornire potenza al circuito
- l'energia dissipata dal componente nell'intervallo  $(t_1, t_2)$  puo' essere calcolata come

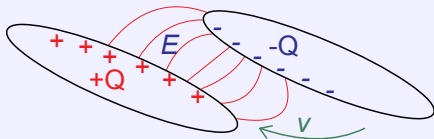
$$w(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} Ri(t)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{v(t)^2}{R} dt \quad (6)$$



## fenomeno fisico

- i condensatori sono componenti in grado di immagazzinare energia nel campo elettrico e quindi appartengono alla seconda classe dei componenti passivi
- il campo elettrico può essere creato prevalentemente nella regione di spazio compresa tra due parti conduttrici isolate e sottoposte ad una differenza di potenziale

## fenomeno



## conservazione della carica

$|+Q| = |-Q| = Q$   
il fenomeno è  
conservativo



## fenomeno fisico

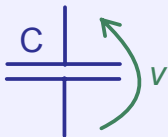
- la carica del condensatore cresce proporzionalmente al, valore di tensione applicata

$$Q(t) = Cv(t) \quad (7)$$

- il coefficiente di proporzionalita'  $C$  e' chiamato **capacita'** del componente e dipende da:

- geometria della struttura  $C \propto \frac{1}{\text{distance}}$
- materiali presenti nel dominio  $C \propto \epsilon$

## simbolo grafico



## unita' di misura

la capacita' si esprime in *farad*  $F$  e molto spesso valori di capacita' sono nell'ordine dei  $mF$ ,  $\mu F$ , etc.



## caratteristica $v - i$

- l'equazione  $Q = Cv$  non e' una equazione costitutiva perche' in essa non appare la corrente  $i$
- la corrente  $i$  puo' essere ottenuta come derivata rispetto al tempo della carica

$$Q = Cv(t) \rightarrow i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(Cv)}{dt} = C \frac{dv}{dt} \quad (8)$$

nell'ipotesi che  $C$  non dipenda dal tempo  $t$

- come conseguenza l'equazione costitutiva e' un'equazione differenziale ordinaria che non lega tra di loro i valori istantanei di  $v$  e  $i$



## caratteristica $v - i$

- l'equazione costitutiva  $i = i(v)$  contiene un operatore derivata, quindi la caratteristica  $v = v(i)$  deve quindi utilizzare un operatore integrale

$$i = C \frac{dv}{dt} \rightarrow v(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{C} i(t') dt' \quad (9)$$

- il dominio di integrazione puo' essere suddiviso in due intervalli:

$$v(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{C} i(t') dt' = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{C} i(t') dt' + \int_0^t \frac{1}{C} i(t') dt' \quad (10)$$

$$v(t) = v(0) + \int_0^t \frac{1}{C} i(t') dt' \quad (11)$$



## potenza associata al condensatore

- la potenza istantanea in un condensatore e' data da:

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t) \left( C \frac{dv}{dt} \right) \quad (12)$$

- in funzione del segno di  $v(t)$  e di  $\frac{dv}{dt}$ , la potenza istantanea puo' essere positiva o negativa,  $p < 0 \Rightarrow C$  cede potenza
- il differenziale dell'energia associata ad una trasformazione infinitesima  $dt$  e' dato da:

$$dw = v \left( C \frac{dv}{dt} \right) dt = Cvdv = d \left( \frac{1}{2} Cv^2 \right) \quad (13)$$

- l'ultima espressione rappresenta un **differenziale esatto** e quindi la trasformazione e' **reversibile** o **conservativa**



## energia

- integrando il  $dw$  da zero ad un valore di tensione si ottiene:

$$w = \int_0^V dw = \int_0^V Cvdv = \frac{1}{2}CV^2 \quad (14)$$

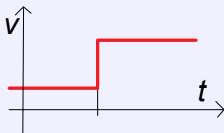
- quindi l'energia immagazzinata nel condensatore dipende dal valore della tensione e quindi  $v$  rappresenta lo **stato energetico** del componente
- la tensione su un condensatore e' quindi detta **variabile di stato**
- qualsiasi variazione di tensione ai capi di  $C$  implica un trasferimento di potenza il cui integrale nel tempo deve bilanciare la variazione di energia immagazzinata





## energia

- in caso di una variazione istantanea di tensione



$$p(t) = v(t)i(t) = v(t) \left( C \frac{dv}{dt} \right) \rightarrow \infty \quad (15)$$

la potenza avrebbe valore infinito

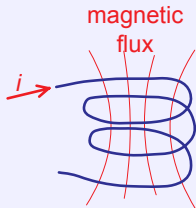
- dato che nessun componente è in realtà in grado di fornire potenza infinita, allora **la tensione in un condensatore è una funzione continua**



## definizione

- il componente induttore e' in rado di immagazzinare energia nel campo magnetico, quindi appartiene alla terza classe di utilizzatori
- una corrente che fluisce in un conduttore crea, nella regione di spazio circostante, un campo magnetico ed un flusso magnetico concatenato con l'avvolgimento

## fenomeno

 $\Phi - i$ 

il flusso magnetico concatenato dipende da  $i$ :

$$\Phi = Li \quad (16)$$

spesso  $L = L(i)$

$[L] = \text{henry}$ , simbolo H

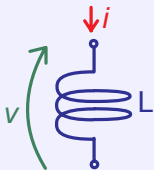


## caratteristica $v - i$

- come nel caso del condensatore,  $\Phi = Li$  non e' una equazione caratteristica dato che  $v$  non compare
- la tensione  $v$  si puo' ottenere dalla legge dell'induzione elettromagnetica

$$\Phi = Li(t) \rightarrow v = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt} \quad (17)$$

nell'ipotesi che  $L$  non dipenda da  $t$



- l'equazione costitutiva e' un'EDO di primo grado
- $C$  e  $L$  hanno caratteristiche  $v - i$  simili dove  $v$  ed  $i$  scambiano i loro ruoli (*dualita*)



## caratteristica $v - i$

- come nel caso di  $C$  l'operatore derivata lega  $v$  a  $i$  e quindi l'equazione inversa deve contenere un operatore integrale

$$v = L \frac{di}{dt} \rightarrow i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{L} v(t') dt' \quad (18)$$

- il dominio di integrazione puo' essere suddiviso in due intervalli:

$$i(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{L} v(t') dt' = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{L} v(t') dt' + \int_0^t \frac{1}{L} v(t') dt' \quad (19)$$

$$i(t) = i(0) + \int_0^t \frac{1}{L} v(t') dt' \quad (20)$$



## definizione

- la potenza istantanea in un induttore puo' essere ricavata dalla sua equazione costitutiva come:

$$p(t) = v(t)i(t) = \left( L \frac{di}{dt} \right) i(t) \quad (21)$$

- anche in questo caso, in funzione dei segni di  $i(t)$  e di  $\frac{di}{dt}$ , la potenza istantanea puo' essere positiva o negativa e quindi ci sono configurazioni nelle quali  $L$  puo' cedere energia al circuito

$$dw = \left( L \frac{di}{dt} \right) idt = Lidi = d \left( \frac{1}{2} Li^2 \right) \quad (22)$$

$$w = \int_0^I dw = \int_0^I lidi = \frac{1}{2} LI^2 \quad (23)$$

Classificazione  
componenti

resistore

condensatore

induttore

componenti  
attivi

generatore di

tensione

current source

componenti  
realiconnessioni  
tipo

connessione serie

connessione

parallelo

connessioni a 3

terminali

## variabile di stato

- nel caso dell'induttore l'energia immagazzinata e' proporzionale alla corrente
- nuovamente la corrente e' una variabile che indica lo stato energetico del componente
- seguendo ragionamenti analoghi a quelli fatti per il condensatore si puo' ricavare che la corrente in un induttore e' una variabile continua rispetto al tempo



## generatori ideali

- i generatori sono componenti in grado di fornire potenza ad altri componenti
- la potenza e' generata a spese di qualche altra forma di energia quale elettrochimica, elettromeccanica etc.
- **generatore ideale**: un generatore si dice ideale se e' in grado di fornire potenza infinita agli altri componenti
- nella pratica nessun generatore potra' fornire potenza infinita e quindi un modello di generatore reale sara' sviluppato in seguito

## generatore di tensione ideale

- un generatore di tensione ideale e' un dipolo in grado di fornire una tensione  $e(t)$  ai suoi morsetti indipendentemente dai componenti ad esso collegati
- la tensione  $e(t)$  e' nota ma il valore della corrente che lo attraversa dipende dai carichi che il generatore alimenta

## simbolo grafico



per qualsiasi valore di corrente la tensione e'  $e(t)$



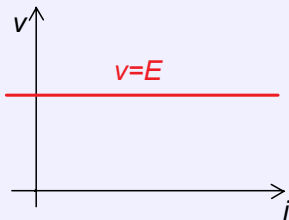




## generatore di tensione ideale costante

- se il valore della tensione e' costante  $e(t) = E$ , la caratteristica del generatore puo' essere tracciata nel piano  $v - i$

## graphic symbol



## batteria

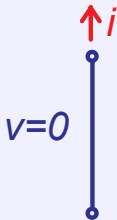
in prima approssimazione  
una batteria puo' essere  
considerata come un  
generatore di tensione  
costante



## generatore di tensione nulla

- un caso particolare di tensione costante e la tensione nulla
- in questo caso per ogni valore di corrente la tensione ai terminali del dipolo è zero

## graphic symbol

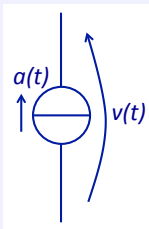


il componente si chiama **corto circuito** e può essere visto come un generatore di tensione zero o come un resistore con resistenza uguale a zero

## generatore di corrente ideale

- un generatore di corrente ideale e' un dipolo che e' in grado di fornire una data corrente  $a(t)$  indipendentemente dai componenti ad esso collegati
- il valore di corrente e' noto ma la tensione ai morsetti del ganaratore dipende dai carichi ad esso collegati

## simbolo grafico



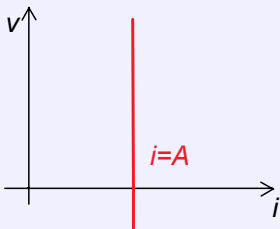
per  $\forall$  valore di tensione  $v(t)$  la corrente nel dipolo e'  $a(t)$





## generatore di corrente ideale costante

- se il valore della corrente  $a(t) = A$  costante, la caratteristica può essere tracciata nel piano  $v - i$



### example

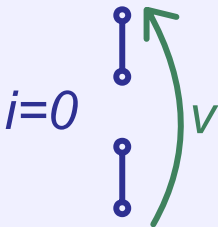
per  $\forall$  valore di tensione applicata la corrente ai morsetti del generatore è  $A$  in natura non si trovano facilmente esempi di generatori di corrente ma la corrente di fulmine può essere approssimata da un generatore ideale di corrente



## generatore di corrente nulla

- anche per il generatore di corrente il valore zero e' un caso particolare
- in questo caso, per qualsiasi valore di tensione applicata la corrente ai morsetti e' nulla

## simbolo grafico



questo componente si chiama **circuito aperto** e puo' essere visto come un generatore di corrente a corrente nulla o come un resistore a  $R \rightarrow \infty$

Classificazione  
componenti

resistore

condensatore

induttore

componenti  
attivigeneratore di  
tensione

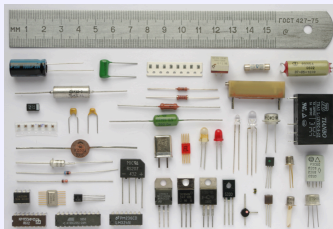
current source

componenti  
realiconnessioni  
tipo

connessione serie

connessione  
paralleloconnessioni a 3  
terminali

## perche componenti reali?



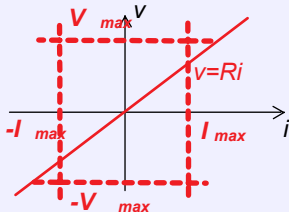
- i componenti reali hanno equazioni costitutive che sono un'approssimazione di quelle ideali
- piu' frequentemente le cause di non idealita' sono dovute a:
  - limiti sui valori delle grandezze ai morsetti
  - effetti parassiti
- molto spesso i componenti reali possono essere espressi da combinazioni di componenti ideali



## limiti costruttivi

- in linea teorica in un resistore descritto da  $v = Ri$ ,  $v$  e  $i$  possono raggiungere qualsiasi valore
- in pratica
  - **problemi termici** limitano il valore di corrente
  - **problemi dielettrici** limitano il valore di tensione

## caratteristica $v - i$



$$-I_{max} \leq i \leq I_{max} \quad (24)$$

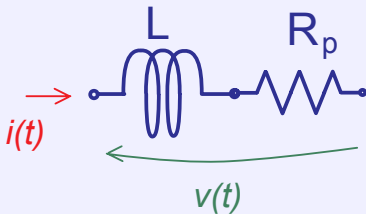
$$-V_{max} \leq v \leq V_{max} \quad (25)$$



## modello di componente reale

- i componenti reali hanno un comportamento che li fa appartenere a più classi di componenti
- questo può però essere utile per creare un **modello equivalente** del componente reale

## induttore reale



$$v(t) = L \frac{di}{dt} + R_p i \quad (26)$$

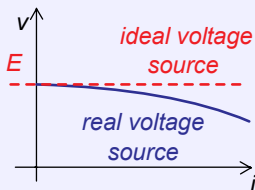




## generatore reale di tensione

- i generatori ideali possono fornire potenza infinita ai componenti collegati
- nei componenti reali questo è limitato dalla potenza convertita in elettrica (elettrochimica, elettromeccanica etc.) che può essere grande ma non infinita

## generatore reale di tensione



un generatore reale  
diminuisce la sua tensione  
quando la corrente erogata  
diventa grande

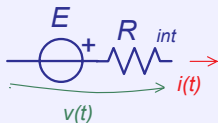


## modello matematico

- un modello di questo nuovo componente puo' essere ottenuto da una serie di Taylor della sua caratteristica centrata nel valore  $i = 0$

$$v(i) = v(i = 0) + \left. \frac{dv}{di} \right|_{i=0} i \quad (27)$$

- il termine  $\frac{dv}{di}$  ha le dimensioni fisiche di una resistenza
- $\frac{dv}{di}$  e' negativa perche' diminuisce  $v$  se  $i$  aumenta ( $\left. \frac{dv}{di} \right|_0 = -R_{int}$ ) dove  $R_{int}$  e' una resistenza fittizia che tiene in conto il comportamento della sorgente reale
- $v(0) = E$



- $v(i) = E - R_{int}i$

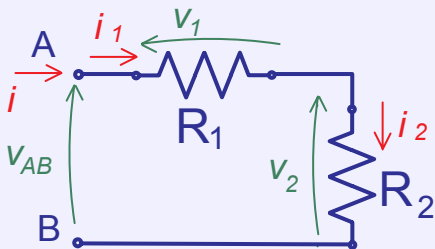


## serie/parallelo

- sebbene le connessioni circuitali possano assumere forme molto complesse, in molti casi esse possono essere ricondotte alla combinazione di elementi connessi in serie e/o in parallelo
- queste connessioni sono analizzate per trovare espressioni semplificate
- le connessioni sono presentate nel caso di resistori ma l'approccio e' valido per tutti i componenti

- due o più componenti sono collegati in serie se sono percorsi dalla stessa corrente

## two resistors



## equazioni costitutive

$$v_1 = R_1 i_1 \quad (28)$$

$$v_2 = R_2 i_2 \quad (29)$$

## equazioni topologiche

$$i = i_1 = i_2 \quad (30)$$

$$v_{AB} - v_1 - v_2 = 0 \quad (31)$$

$$v_{AB} = v_1 + v_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2 = (R_1 + R_2) i = R_{eq} i \quad (32)$$





## partitore di tensione

$$i = \frac{v_{AB}}{R_1 + R_2} \quad (33)$$

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{AB} \quad v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{AB} \quad (34)$$

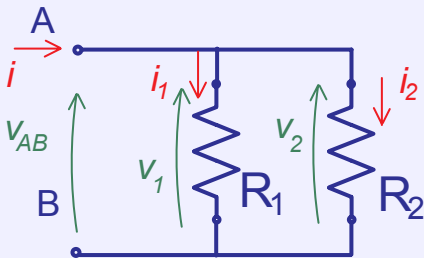
la tensione  $v_{AB}$  si ripartisce tra i resistori ed ogni quota  $k$ -esima e' proporzionale a

$$v_k = \frac{R_k}{\sum_{j=1}^2 R_j} v_{AB} \quad (35)$$



- due o più componenti sono connessi in parallelo se sono sottoposti alla stessa tensione

## due resistori



## equazioni costitutive

$$v_1 = R_1 i_1 \quad (36)$$

$$v_2 = R_2 i_2 \quad (37)$$

## leggi di Kirchhoff

$$i = i_1 + i_2 \quad (38)$$

$$V_{AB} = v_1 = v_2 \quad (39)$$

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V_{AB}}{R_1} + \frac{V_{AB}}{R_2} = V_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (40)$$



## resistore equivalente



$$i = v_{AB} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (41)$$

- la formula precedente e' valida per due resistori in parallelo
- in generale dato che nella connessione parallelo compare il termine  $\frac{1}{R}$  e' piu' conveniente utilizzare le conduttanze

$$i = v_{AB} (G_1 + G_2) \Rightarrow G_{eq} = G_1 + G_2 \quad (42)$$

- la formula vale in caso di  $N$  resistori in parallelo



## partitore di corrente

- in caso di due resistori

$$v_{AB} = \frac{i}{G_1 + G_2} = \frac{i}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i \quad (43)$$

- la corrente  $i$  si ripartisce in ogni resistore come:

$$i_1 = \frac{v_{AB}}{R_1} = \frac{1}{R_1} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i \quad (44)$$

$$i_2 = \frac{v_{AB}}{R_2} = \frac{1}{R_2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \quad (45)$$