Elettrotecnica

Capitolo 3: soluzione dei circuiti elettrici

M. Repetto, L. Giaccone

Dipartimento Energia
Politecnico di Torino

Settembre 2012

che cosa significa soluzione dei circuiti?

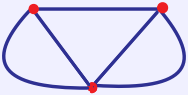
- un metodo per la soluzione dei circuiti deve fornire i seguenti risultati:
  - tensioni su tutti i lati del circuito
  - correnti in tutti i lati del circuito
- le tensioni e le correnti di lato sono cosi' chiamate variabili di rete
- un metodo di soluzione puo' essere:
  - generale se non dipende dalla particolare struttura del circuito i studio
  - particolare se puo' essere applicato solo ad alcuni tipi di circuito
- al fine di trattare circuiti complessi, dovrebbe essere possibile trasformare il metodo in una procedura automatica per la soluzione al calcolatore

quante equazioni sono disponibili?

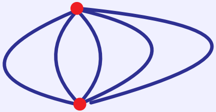
- le equazioni a disposizione per la soluzione del circuito sono di due tipi:
  - equazioni costitutive
  - equazioni topologiche
- come in ogni metodo di soluzione la strategia e' quella di scrivere un numero di equazioni significative pari al numero delle incognite
- per poter essere tradotto in un algoritmo, la correttezza del metodo deve essere garantita matematicamente

quante equazioni servono?

- come in ogni processo di soluzione, il metodo deve essere in grado di scrivere un numero di equazioni uguale al numero di variabili
- se un circuito ha L lati, il numero di incognite e' uguale a una tensione ed una corrente per lato, quindi$N_{incognite} = 2L$
- alcune delle equazioni sono definite sui nodi (LKC) ma il numero dei lati non e' legato al numero dei nodi



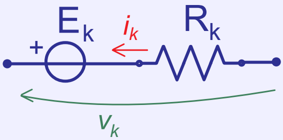
L=5, N=3



L=5, N=2

equazioni di vincolo

- il problema deve determinare L valori di tensione e L valori di corrente
- le equazioni da usare sono:
  - equazioni costitutive
  - leggi di Kirchhoff delle correnti
  - leggi di Kirchhoff delle tensioni



$$v_k = E_k - R_k i_k \tag{1}$$

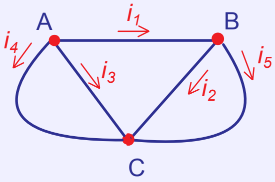
L equazioni costitutive in modo che

$2L$ variabili
-L vincoli
=L variabili ancora libere

equazioni di Kirchhoff

- le rimanenti L variabili devono essere vincolate attraverso le LK che sono equazioni lineari
- se il circuito contiene N nodi si possono scrivere N LKC

LKC



KCL(A) $\quad -i_1 - i_3 - i_4 = 0$
KCL(B) $\quad +i_1 - i_2 - i_5 = 0$
KCL(C) $\quad +i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$

KCL(A) +KCL(B)=-KCL(C)
la terza equazione LKC e' linearmente dipendente dalle prime due

quante sono le equazioni LKC valide?

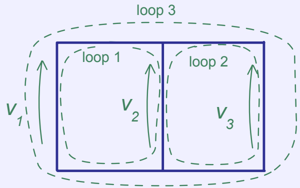
- se tutte e tre le equazioni LKC fossero scritte in un sistema di equazoni lineari, il sistema non potrebbe essere risolto
- la ragione della dipendenza lineare va ricercata nel fatto che il sistema e' *isolato* e quindi la quantita' di carica in circolo e' costante ed esiste un vincolo aggiuntivo
- come risultato si ottiene che in un circuito con N nodi, solo $N-1$ equazioni LKC indipendenti possono essere scritte
- il bilancio *vincoli-variabili* diventa:

L variabili
$-(N-1)$ LKC
=$L-N+1$ variabili ancora da vincolare

leggi di Kirchhoff delle tensioni

- le rimanenti $L - N + 1$ variabili devono essere determinate per mezzo delle equazioni che non sono state ancora utilizzate, cioe' delle LKT
- un teorema della *teoria dei grafi* asicura che e' sempre possibile trovare questo numero di equazioni LKT linearmente indipendenti

LKT

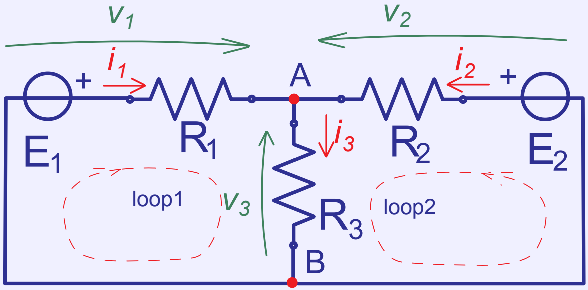


KVL(1) $\quad v_1 - v_2 = 0$
KVL(2) $\quad v_2 - v_3 = 0$
KVL(3) $\quad v_1 - v_3 = 0$

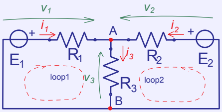
KVL(1) +KVL(2)=-KVL(3)
la terza equazione e' linearmente dipendente dalle prime due.
$(loop(3) = loop(1) \bigcup loop(2))$

rete resistiva LTI

- si deve risolvere la rete resistiva LTI con $N = 2$ nodi e $L = 3$ lati



rete resistiva LTI



equazioni costitutive

$$v_1 + R_1 i_1 - E_1 = 0 \quad (2)$$

$$v_2 + R_2 i_2 - E_2 = 0 \quad (3)$$

$$v_3 - R_3 i_3 = 0 \quad (4)$$

equazioni topologiche

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \quad (5)$$

$$v_1 - v_3 = 0 \quad (6)$$

$$v_2 - v_3 = 0 \quad (7)$$

esempio sull'utilizzo del metodo algebrico

rete resistiva LTI

le tensioni possono essere eliminate

$$v_1 = E_1 - R_1 i_1 \tag{8}$$

$$v_2 = E_2 - R_2 i_2 \tag{9}$$

$$v_3 = R_3 i_3 \tag{10}$$

ottenendo un sistema di 3×3 equazioni

$$i_1 + i_2 - i_3 = 0 \tag{11}$$

$$R_1 i_1 + R_3 i_3 = E_1 \tag{12}$$

$$R_2 i_2 + R_3 i_3 = E_2 \tag{13}$$

rete resistiva LTI

volendo risolvere rispetto alla variabile i_3, le altre correnti possono essere eliminate:

$$i_1 = \frac{E_1 - R_3 i_3}{R_1} \tag{14}$$

$$i_2 = \frac{E_2 - R_3 i_3}{R_2} \tag{15}$$

in modo da ottenere un'equazione finale in i_3

$$\frac{E_1 - R_3 i_3}{R_1} + \frac{E_2 - R_3 i_3}{R_2} - i_3 = 0 \tag{16}$$

$$i_3 = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \tag{17}$$